

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记26——参数方程

参数方程的示例

现在有两个函数， $x = a\cos t$ 和 $y = a\sin t$ ，如果将 t 看作时间，我们感兴趣的第一个问题是这两个函数将形成什么曲线？

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$$

很明显是一个圆。

另一个关注的问题是随着时间 t 的变化，在这个圆上的运动方向，包括什么时间上位于圆的哪个位置，可以把它想象成行星的轨道。

可以通过描点解决。

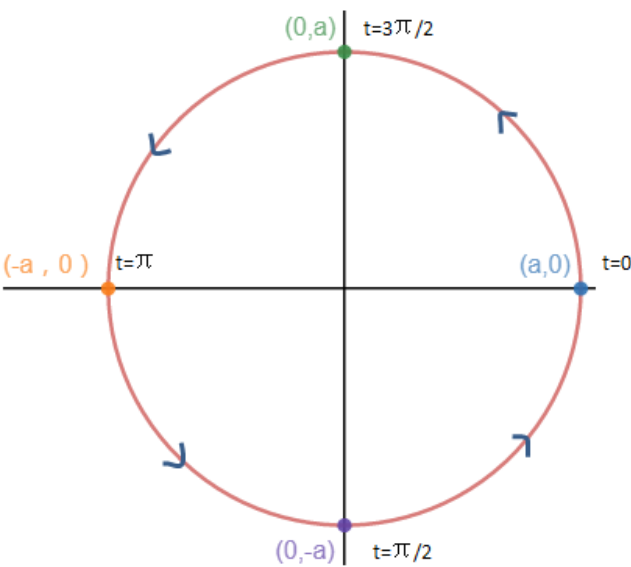
$$t = 0, \quad (x, y) = (a\cos 0, \sin 0) = (a, 0)$$

$$t = \pi/2, \quad (x, y) = (a\cos \pi/2, \sin \pi/2) = (0, a)$$

$$t = \pi, \quad (x, y) = (a\cos \pi, \sin \pi) = (-a, 0)$$

$$t = 3\pi/2, \quad (x, y) = (a\cos 3\pi/2, \sin 3\pi/2) = (0, -a)$$

由此可以得知，点在圆上逆时针运动：



最后一个感兴趣的问题是弧长，也就是在一段时间内移动的路程：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

弧长关于时间的变化率：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

由此推出：

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

将这个结果应用到上面的问题：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\text{acost}}{dt} = -\text{asint}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\text{asint}}{dt} = \text{acost}$$

$$ds = \sqrt{(-\text{asint})^2 + (\text{acost})^2} dt = a dt$$

$$\frac{ds}{dt} = a$$

这可以看作是点绕圆运动的速率，由于a是一个常数，所以它是匀速运动的。

如果现在有一个新的速度， $x = \text{acoskt}$, $y = \text{asinkt}$ ，则：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\text{acoskt}}{dt} = -\text{aksinkt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\text{asinkt}}{dt} = \text{akcost}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(-\text{aksinkt})^2 + (\text{akcost})^2} = ak$$

速度改变了，但运动仍是匀速的。

以上是一个简单的参数方程的推导过程，我们的推导依据是弧长公式：

$$\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

参数方程包含的信息

两个函数 $x = 2\text{sint}$, $y = \text{cost}$ ，根据这两个函数可以得到：

$$x^2/4 + y^2 = \text{sin}^2t + \text{cos}^2t = 1$$

在平面直角坐标系中这是一个椭圆，除此之外还可以得到很多特定的信息，比如起点、轨迹、方向、速率和弧长。

如果去 $t = 0$ 为起点，则：

$$t = 0, \quad (x, y) = (0, 1)$$

$$t = \pi/2, \quad (x, y) = (2, 0)$$

$$t = \pi, \quad (x, y) = (0, -1)$$

$$t = 3\pi/2, \quad (x, y) = (-2, 0)$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

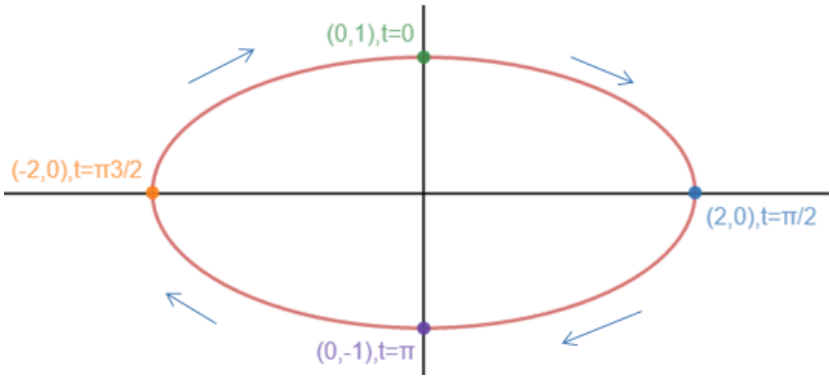
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

点按照顺时针方向走椭圆上运动：



点在一路上的速率：

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d2\sin t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dcost}{dt}\right)^2} = \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}$$

点运行一周需要的时间是 2π ，需要对ds积分，所以椭圆的弧长：

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

这是一个高等积分了，没有可以用初等函数表示的原函数，所以这就是弧长的答案，也是为什么中学没有学习过椭圆周长公式的原因。

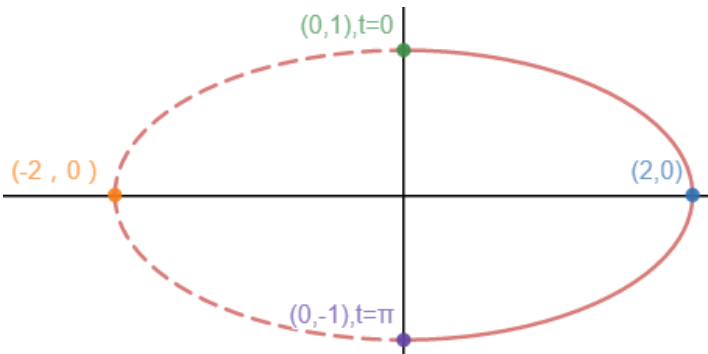
新的思维模式

在上面的例子中， $x = 2\sin t$ ， $y = \cos t$ ，虽然我们最终将它们联合在一起形成直角坐标系中的曲线，但是需要注意的是，这里的x和y分别代表两个不同的函数，我们不再认为y是x的函数，即 $y \neq y(x)$ 。这是很明显的，因为同一个x将对应两个y值。此时参数t的作用便凸显出来，通过t建立方程，描述整个曲线。t是没有出现在图像上的另一个维度，所以我们将t想象时间：一个点沿着椭圆跑，在不同的时间到达不同的位置。

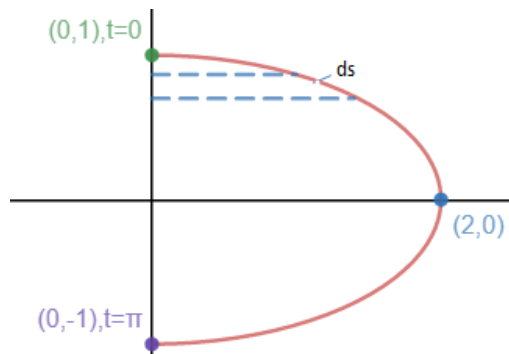
在这个例子中，我们要抛开“y是x的函数”的概念，这里y和x都是t的函数， $y = y(t)$ ， $x = x(t)$ ，它们有了不同的意义，x不再是自变量，它也是函数。理解了这一点，就可以站在更高的层面看待问题。

椭球的表面积

现在需要计算 $x = 2\sin t$ ， $y = \cos t$ 形成的椭圆绕y轴旋转，形成的椭球的表面积。



依然使用圆盘法，对弧长 ds 进行积分：



$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$dArea = 2\pi x ds = 2\pi(2\sin t)(\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} dt)$$

$$Area = \int_0^\pi 2\pi(2\sin t)(\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} dt)$$

示例

根据参数方程计算曲线在 $1 \leq t \leq 2$ 时的长度， $y = t - 1/t$, $x = t + 1/t$

$$x + y = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2(t^4 + 1)}}{t^2}$$

$$s = \int_1^2 \frac{\sqrt{2(t^4 + 1)}}{t^2} dt$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [参数方程](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记25——弧长和曲面面积](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记27——极坐标下的面积](#)

posted on 2017-11-29 22:42 我是8位的 阅读(3122) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes